

$$(2) f(x) = 1 - \frac{2}{3}(x-2)^2, x \in [0, 3]$$

$$(3) f(x) = \sin 2x - x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$(4) f(x) = x + \sqrt{1-x}, x \in [-1, 1]$$

4. 函数 $y = \frac{1}{x^2+1} (x \geq 0)$ 在何外取得最值?

5. 要造一个容积为 V 的带盖圆桶, 问圆桶的底面半径 x 与高 y 的比值为多少时,

6. 有一长为 a 的铁丝...

第五节 曲线的凹凸性与拐点 简单函数图形的描绘

前面利用导数知识研究了函数的单调性、极值及最值问题, 本节继续利用导数

来研究函数图形的变化.

函数的单调性在图形上的反映就是曲线的上升或下降, 但曲线的上升

不能全面反映函数图形的变化. 例如, 函数 $y = x^2$ 和 $y = \sqrt{x}$ 的图形

(1,1), 在 $x \geq 0$ 时, 这两个函数都是单调增加的, 但

同, 曲线 $y = x^2$ 位于它的每一点切线的上方 (见图 3-8)

而曲线 $y = \sqrt{x}$ 位于它的每一点切线的下方 (见图 3-9). 对于曲线的上升

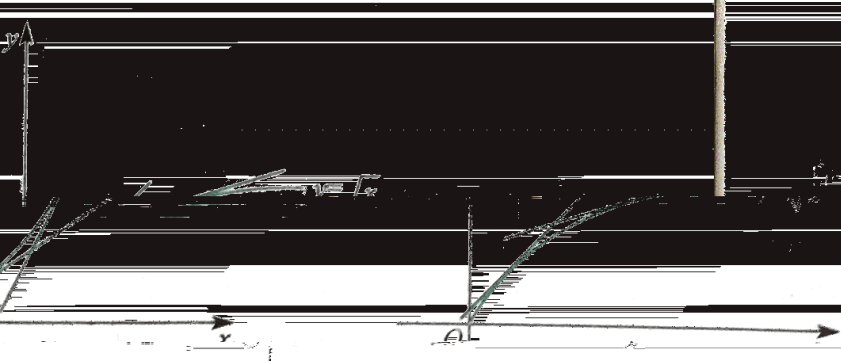


图 3-8

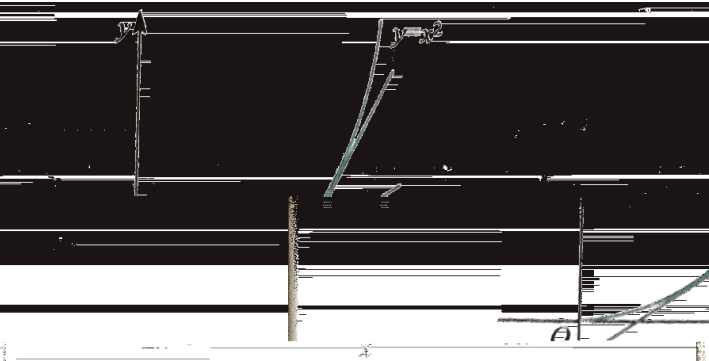


图 3-9

位于其上任意一点

定义 2 设函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上连续, 如果函数的曲线

方,则称该曲线在区间I上是凹的,区间I称为曲线的凹区间;如果函数...的切线的下...的曲线位于其上,则称该曲线在区间I上是凸的,区间I称为...

曲线的凸区间

如何判定曲线的凹凸性呢?

由图 3-10 可以看出,如果曲线是凹的,那么切线的倾角随着自变量x的增大而增大

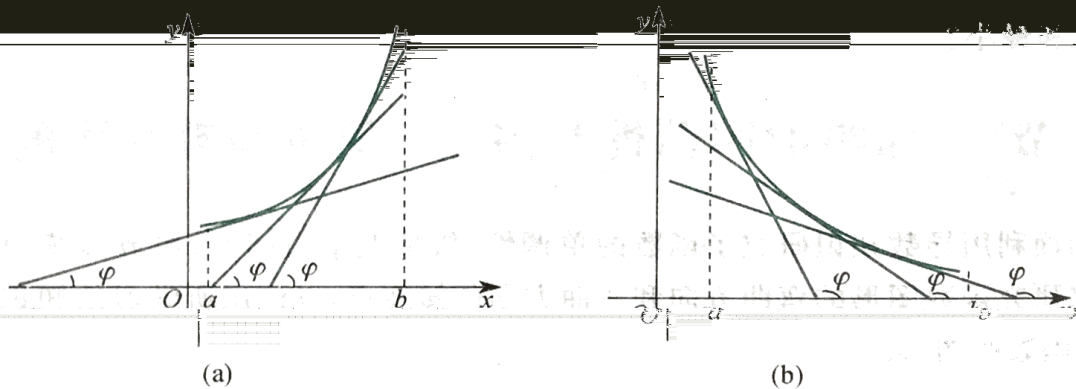


图 3-10

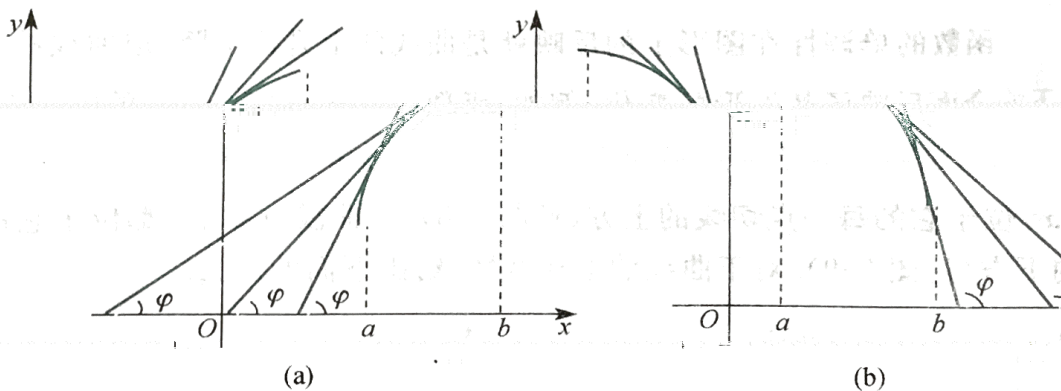


图 3-11

下面给出曲线 $y = f(x)$ 的凹凸性可利用二阶导数的符号来判断,并给出曲线凹凸性的判定定理.

曲线 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 内是凹的;
在 $[a, b]$ 内是凸的.

- 定理 9 设函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内有二阶导数,则
- (1) 若在 (a, b) 内 $f''(x) > 0$, 则曲线 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内是凹的;
 - (2) 若在 (a, b) 内 $f''(x) < 0$, 则曲线 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内是凸的.
- 注意 定理 9 对于其他类型区间也成立.